Numeração decimal

Transformação de números decimais em frações decimais

Observe os seguintes números decimais:

- 0,8 (lê-se "oito décimos"), ou seja, $\frac{8}{10}$.
- 0,65 (lê-se "sessenta e cinco centésimos"), ou seja, $\frac{65}{100}$.
- 5,36 (lê-se "quinhentos e trinta e seis centésimos"), ou seja, $\frac{536}{100}$.
- 0,047 (lê-se "quarenta e sete milésimos"), ou seja, $\frac{47}{1000}$

Verifique então que:

$\underbrace{0{,}8}_{\text{uma casa decimal}} = \frac{8}{\underbrace{10}_{\text{um zero}}}$	$\underbrace{0{,}65}_{\text{duas casas decimais}} = \frac{65}{\underbrace{100}_{\text{dois zeros}}}$
$\underbrace{5{,}36}_{\text{duas casas decimais}} = \frac{536}{\underbrace{100}_{\text{dois zeros}}}$	$\underbrace{0{,}047}_{\text{três casas decimais}} = \frac{47}{\underbrace{1000}_{\text{três zeros}}}$

Assim:

> Um número decimal é igual à fração que se obtém escrevendo para numerador o número sem vírgula e dando para denominador a unidade seguida de tantos zeros quantas forem as casas decimais.

Transformação de fração decimal em número decimal

Observe as igualdades entre frações decimais e números decimais a seguir:

$$\frac{15}{\underbrace{10}_{\text{um zero}}} = \underbrace{1{,}5}_{\text{uma casa decimal}} \qquad \frac{31}{\underbrace{100}_{\text{dois zeros}}} = \underbrace{0{,}31}_{\text{duas casas decimais}}$$

$$\frac{7}{\underbrace{1000}_{\text{três zeros}}} = 0,\underbrace{007}_{\text{três casas decimais}} \qquad \frac{5825}{\underbrace{10000}_{\text{quatro zeros}}} = 0,\underbrace{5825}_{\text{quatro casas decimais}}$$

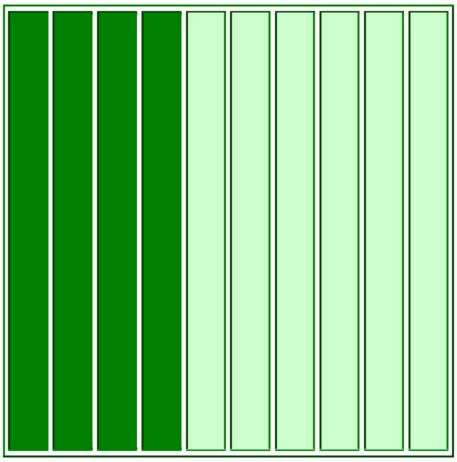
Podemos concluir, então, que:

> Para se transformar uma fração decimal em número decimal, basta dar ao numerador tantas casas decimais quantos forem os zeros do denominador.

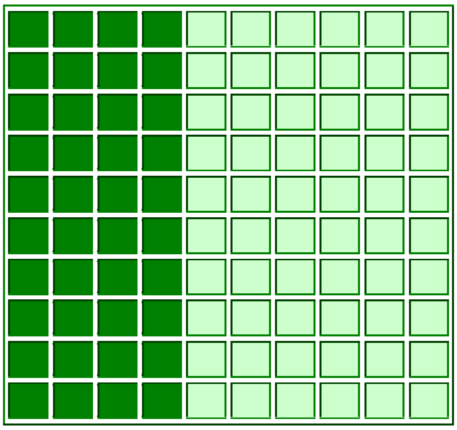
Numeração decimal

Decimais equivalentes

As figuras foram divididas em 10 e 100 pares, respectivamente. A seguir foram coloridas de verde escuro 4 e 40 destas parte, respectivamente. Observe:



$$\frac{4}{10} = 0,4$$



$$\frac{40}{100} = 0,40$$

Verificamos que 0,4 representa o mesmo que 0,40, ou seja, são decimais equivalentes.

Logo, decimais equivalentes são aqueles que representam a mesma quantidade.

Exemplos:

0,4 = 0,40 = 0,400 = 0,4000	8 = 8,0 = 8,00 = 8,000
2,5 = 2,50 = 2,500 = 2,5000	95,4 = 95,40 = 95,400 = 95,4000

Dos exemplos acima, podemos concluir que:

> Um número não se altera quando se acrescenta ou se suprime um ou mais zeros à direita de sua parte decimal.

Comparação de números decimais

Comparar dois números decimais significa estabelecer uma relação de igualdade ou de desigualdade entre eles. Consideremos dois casos:

1º Caso: As partes inteiras

> O maior é aquele que tem a maior parte inteira.

Exemplos:

3,4 > 2,943, pois 3 >2.

10,6 > 9,2342, pois 10 > 9.

2º Caso: As partes inteiras são iguais

O maior é aquele que tem a maior parte decimal. É necessário igualar inicialmente o número de casas decimais acrescentando zeros.

Exemplos:

- 0,75 > 0,7 ou 0,75 > 0,70 (igualando as casas decimais), pois 75 > 70.
- 8,3 > 8,03 ou 8,30 > 8,03 (igualando as casas decimais), pois 30 > 3.

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

Neste capitulo abordaremos o cálculo de números sob a forma de potencias.

Com a evoluçao tecnologica este tipo de calculos está praticamente reservado ao uso de calculadoras cientificas; mas nao se deixe levar por esta tendencia só vai limitar seus conhecimentos.

Vamos supor que se esquece da calculadora ou que o calculo é tão grande que precisa saber analisar os seus resultados continuamente ou ainda que o seu exercicio parte da analise de um grafico de uma potencia e que precisa chegar a função potencia.

Bom, a calculadora não ajuda muito!!!

Potenciação

REGRAS POTENCIAÇÃO

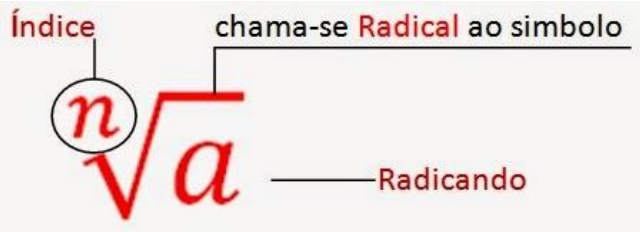
1.	$a^0 = 1$	→ Seja qual for o número elevado a 0, o seu resultado é sempre 1.
2.	$a^1 = a$	→ Todo e qualquer número elevado a 1, o seu resultado é o próprio número.
3.	$a^{-k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k$	→ Potência de expoente negativo: quando expoente for negativo, o seu resultado é o inverso da base levantado ao expoente, desta vez, positivo.
4.	$a^n . a^m = a^{n+m}$	→ Multiplicação de Potências (= base): multiplicando potências com a mesma base, mantem − se a base e somam − se os expoentes.
5.	$a^n . b^n = (a.b)^n$	→ Multiplicação de Potências (≠ base): multiplicando potências com bases diferentes, mantem − se o expoente e multiplicam − se as bases.
6.	$a^n : a^m = a^{n-m}$	→ Divisão de Potências (= base): na divisão de potências com a mesma base, mantem − se a base e subtraem − se os expoentes.
7.	$a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	→ Divisão de Potências (≠ base): divisão de potências com bases diferentes, mantem − se o expoente e dividem − se as bases.
8.	$(a^n)^p = a^{n.p}$	→ Potência de uma Potência: na potência de uma potência, mantem − se a base e multiplicam − se os expoentes.
9.	$a^{\frac{n}{p}} = \sqrt[p]{a^n}$	→ Potência de expoente fraccionário: quando o expoente de uma potência, é uma fracção, resulta numa raíz cujo indice é o denominador da fracção.

n , m = Expoente ; a , b = Constante

Regras Potenciação (Potencias).

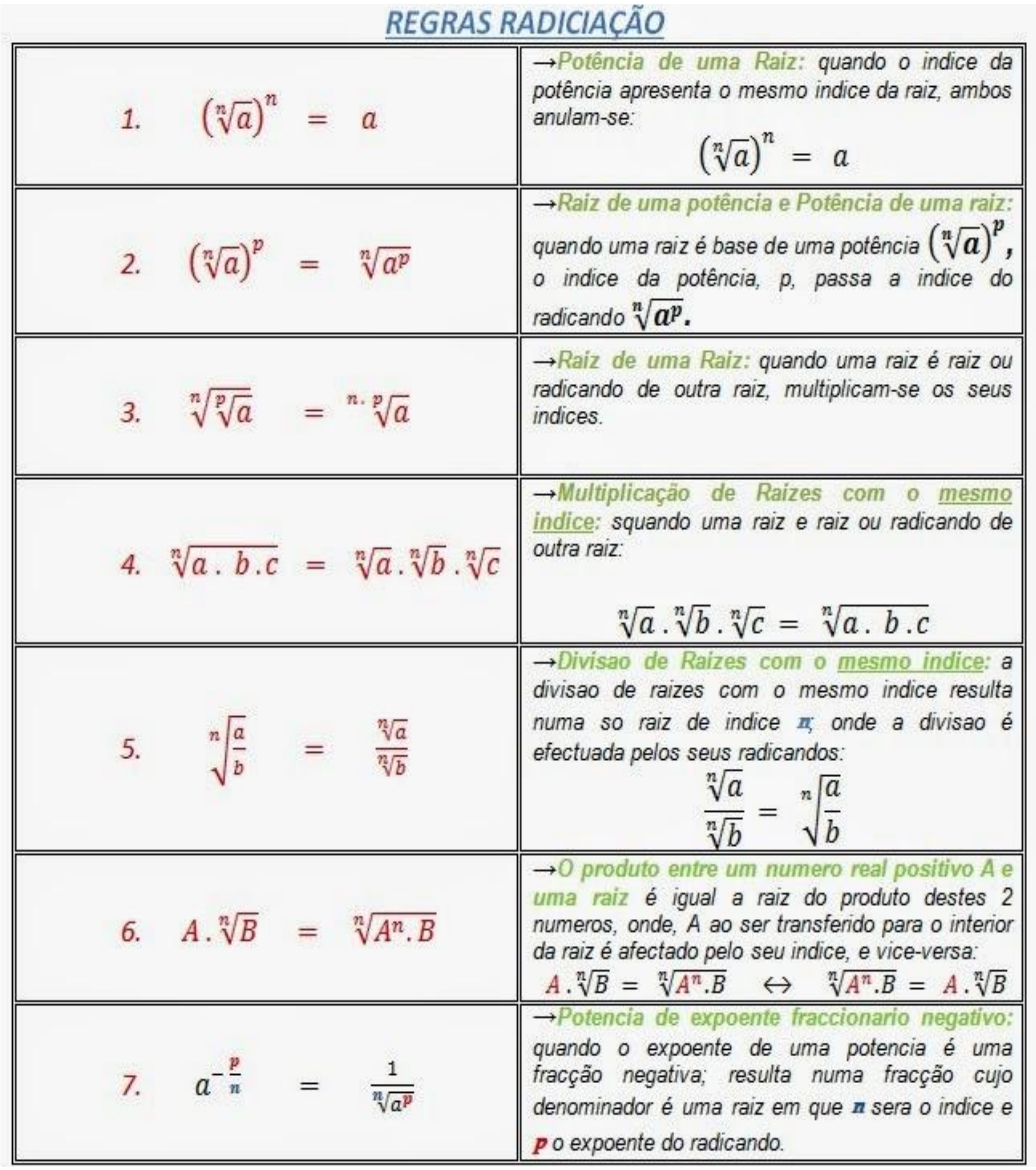
DOWNLOAD REGRAS POTENCIAS

Radiciação



Radical, Radicando, Índice

Quando o índice da raiz, *n*, é omitido; então é assumido como índice daquela raiz o valor2. Ou seja *n = 2*.
Conforme se espera; toda a raiz deve ter um resultado real *x*, onde a correspondência entre estes é expressa abaixo.



REGRAS RADICIAÇÃO

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	→Potência de uma Raiz: quando o indice da potência apresenta o mesmo indice da raiz, ambos anulam-se: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
2. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$	→Raiz de uma potência e Potência de uma raiz: quando uma raiz é base de uma potência $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p$, o indice da potência, p, passa a indice do radicando $\sqrt[n]{a^p}$.
3. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$	→Raiz de uma Raiz: quando uma raiz é raiz ou radicando de outra raiz, multiplicam-se os seus indices.
4. $\sqrt[n]{a.\,b.c} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}$	→Multiplicação de Raizes com o mesmo indice: squando uma raiz e raiz ou radicando de outra raiz: $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a.\,b.c}$
5. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	→Divisao de Raizes com o mesmo indice: a divisao de raizes com o mesmo indice resulta numa so raiz de indice n; onde a divisao é efectuada pelos seus radicandos: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
6. $A.\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A^n.B}$	→O produto entre um numero real positivo A e uma raiz é igual a raiz do produto destes 2 numeros, onde, A ao ser transferido para o interior da raiz é afectado pelo seu indice, e vice-versa: $A.\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A^n.B} \leftrightarrow \sqrt[n]{A^n.B} = A.\sqrt[n]{B}$
7. $a^{-\frac{p}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^p}}$	→Potencia de expoente fraccionario negativo: quando o expoente de uma potencia é uma fracção negativa; resulta numa fracção cujo denominador é uma raiz em que *n* sera o indice e *p* o expoente do radicando.

Regras Radiciação (Raizes).

DOWNLOAD REGRAS RAIZES (radiciação)

Definições e Demonstrações:

Raiz de 1 quociente e quociente de 2 raizes: **o quociente de 2 radicais do mesmo indice, é o radical do mesmo indice cujo o radicando é quociente dos radicandos do divisor e do dividendo.**

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{12:3} = \sqrt{4} = 2$$

Raiz de 1 Raiz: **A raiz de indice n da raiz de indice p de um certo numero e a raiz de indicen.p desse numero.**

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{8}} = \sqrt[3\times 2]{8} = \sqrt[6]{8}$$

Raiz de 1 produto e produto de 1 raiz: **A raiz de um produto e igual ao produto das raizes do mesmo indice.**

$$\sqrt{4\times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{9}$$

Multiplicação de Potencia da mesma base (no caso base -3): **O produto de potencia da mesma base é a potencia com a mesma base cujo expoente é a soma dos expoentes dos factores.**

$$(-3)^4 \times (-3)^3 = (-3)^{4+3} = (-3)^7$$

Divisão de potencias com a mesma base (base -2): **O quociente de potencias com a mesma base é uma potencia com a mesma base e cujo o expoente é a diferença entre os expoentes do dividendo e do divisor.**

$$(-2)^5 : (-2)^2 = (-2)^{5-2} = (-2)^3$$

Potencia de expoente fraccionário: **Reciprocamente todo o radical é convertivel em potencia de expoente fraccionário.**

1. $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$

2. $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Potencia de uma potencia: **A potencia de uma potencia éoutra potência com a base da 1ª e expoente igual ao produto dos expoentes.**

$$(2^3)^2 = 2^{3\times 2} = 2^6$$

Inversamente/o: **Qualquer coefiente ou factor de um radical pode passar pode passar para factor do seu radicando desde que se multiplique o seu expoente pelo indice do radical.**
Os Exercicios seguintes 1., 2. e 3. são os mais importantes para a manipulação fluente de potencias e raizes, verifique com atenção a simplicidade das operações:

$$1.\ \ 2\times\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{2^3\times a} = \sqrt[3]{2\times 2\times 2\times a} = \sqrt[3]{8\times a} = \sqrt[3]{8a}$$

$$2.\ \ 3\times a^2\times\sqrt{b} = 3a^2\times\sqrt{b} = \sqrt{3^2\times a^4\times b} = \sqrt{3^2a^4b} = \sqrt{9a^4b}$$

O proximo exercicio vem demonstrar o porquê das operaçoes entre coeficientes (o nº fora da raiz) e radicando (o nº dentro da raiz) são possiveis.
Quando o indice da raiz for igual ao expoente do radicando, o radicando com expoente = ao indice da raiz passa a coeficiente dessa mesma raiz.

$$3.\ \ \sqrt{2^5} = \sqrt[2]{2^2\times 2^2\times 2^1} = 2\times\left(\sqrt[2]{2^2\times 2^1}\right) = 2\times 2\times\left(\sqrt[2]{2^1}\right) = 4\times\sqrt[2]{2} = 4\sqrt{2}$$

$$CA.\ (calculo\ auxiliar)$$

$$\Rightarrow\ \sqrt[2]{2^2\times 2^2\times 2^1} = \sqrt[2]{2^{2+2+1}} = \sqrt[2]{2^5} = \sqrt{2^5}$$

DOWNLOAD Definições e Demonstrações

Exercícios:

Vamos resolver alguns exercicios simples da utilização de potencia e radicais, saliento, a simplicidade destes exercicios farão com que domine muito bem esse tipo de operações podendo posteriormente tentar resolver exercicios maiores e mais complexos.

1. Efectue as divisões e multiplicações propostas:

1. $\left(10 \times \sqrt{6}\right) : \left(5\sqrt{3}\right)$

$$\Rightarrow \frac{10 \times \sqrt{6}}{5 \times \sqrt{3}} \Rightarrow \frac{10\sqrt{6}}{5\sqrt{3}} = \frac{10}{5} \times \sqrt{\frac{6}{3}} = 2 \times \sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{2}$$

NOTA: Existe diferença entre o uso dos sinais:

$\Rightarrow$ **: significa equivalente; usa-se quando não é feito cálculo nehum mas sim um arranjo, simplificação, moldagem do exercicio de forma a que possamos percebe-lo melhor.**

$=$

: o sinal de igual; apresenta sempre um resultado é sempre realizada alguma operação (soma, divisão, subtracção ou multiplicação).

2. $\sqrt{3} : \sqrt{12}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{3}{12}} = \sqrt{\frac{3:3}{12:3}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

NOTA: *O valor utilizado* 3 *é o multiplo comum da fracção; ou seja; tanto 3 como 12 sao divisiveis ou podem ser divididos por* 3*, mas, é mais dificil fazer o calculo fracção* $\frac{3}{12}$ *do que o calculo* $\frac{1}{4}$.

Então, multiplicando ambos os termos da fracção pelo mesmo numero obtemos exactamente o mesmo resultado:

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{12} = 0.25 \quad ou \quad \frac{1}{4} = 0.25$$

2. Efectue os seguintes cálculos elevando ao quadrado cada um dos exercícios propostos:

$$2.1. \qquad \sqrt{2} - 1$$

$$\Rightarrow \ (\sqrt{2} - 1)^2 = (\sqrt{2} - 1) \times (\sqrt{2} - 1) =$$

$\mathbf{CA.}\,(\boldsymbol{calculo\ auxiliar})$

$$\Rightarrow (\sqrt{2} - 1) \times (\sqrt{2} - 1)$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) + \left(\sqrt{2} \times (-1)\right) + \left((-1) \times \sqrt{2}\right) + ((-1) \times (-1))$$

$$\Rightarrow (\sqrt{\mathbf{2}})^2 + (-\sqrt{2}) + (-\sqrt{2}) + (-1)^2$$

$$= \mathbf{2} - \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1$$

$$= 2 - 2 \times \sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow \ \mathbf{2} - 2\sqrt{2} + 1$$

$2.1. \rightarrow$ ***Continuando***

$$= \ 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 2 + 1 - 2\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2}$$

No exercicio seguinte, Não se preocupe com a utilização de letras, só precisa assumir a letra como se fosse um numero qualquer do qual nao sabe o valor.

$$2.2\ \left(\sqrt{a^5 \times \sqrt{a^3}}\right)^2 = \left(\left(\sqrt{a^5 \times \sqrt{a^3}}\right)^2\right)^2 = \left(\sqrt{a^5 \times \sqrt{a^3}}\right)^{2\times 2} =$$

$$= \left(\sqrt{a^5 \times \sqrt{a^3}}\right)^4 = \left(\sqrt{\sqrt{a^{10} \times a^3}}\right)^4 = \left(\sqrt{\sqrt{a^{10+3}}}\right)^4 = \left(\sqrt{\sqrt{a^{13}}}\right)^4$$

$$= \left(\sqrt[2\times 2]{a^{13}}\right)^4 = \left(\sqrt[4]{a^{13}}\right)^4 = a^{13}$$

Resolucão 2.2

1. O exercicio 2., propoe que se eleve ao quadro, assim colocamos tudo entre parenteses indicando que se vai englobar todo o calculo no quadrado:

$$\boxed{\left(\left(\sqrt{a^5 \times \sqrt{a^3}}\right)^2\right)^2}$$

2. Segundo a regra <u>Potencia de uma Potencia</u> multiplicam-se os dois expoentes de potencia:

$$\left(\sqrt{a^5 \times \sqrt{a^3}}\right)^{\boxed{2\times 2=4}}$$

3. Conforme a regra <u>Inversamento</u> qualquer coeficiente pode passar para radicando (para dentro da raiz) desde que se multiplique o seu expoente pelo expoente da raiz:

5(expoente do coeficiente da 2ª raiz) x 2(expoente da 2ª raiz).

Passando o coeficiente para dentro da raiz (a radicando) o coeficiente da 2ª raiz passa a 1.

Assim como toda e qualquer multiplicação tem coeficiente 1. Mesmo que não se apresente por escrito.

$$= \left(\sqrt{a^{5\times 2}\sqrt{a^3}}\right)^4 = \left(\sqrt{1\times\sqrt{a^{10}\times a^3}}\right)^4 = \left(\sqrt{\sqrt{a^{10}\times a^3}}\right)^4$$

4. Seguinte, a regra <u>Multiplicação de potencia da mesma base</u> diz que se as base forem iguais entao da-se uma a mesma base e somam-se os seus expoentes:

$$\left(\sqrt{\sqrt{a^{10+3}}}\right)^4 = \left(\sqrt{\sqrt{a^{13}}}\right)^4$$

5. Continuando, aplica-se a regra <u>Raiz de uma raiz</u> onde tem-se 2 raizes com o mesmo indice ou expoente, <u>2</u>, multiplicam-se entao os seus expoentes e como seu produto resulta numa só raiz:

Como, o indice ou expoente da raiz
=
indice ou expoente da potencia
⇒
ambos os factores anulam-se

$$\left(\sqrt{\sqrt{a^{13}}}\right)^4 = \left(\sqrt[2]{\sqrt[2]{a^{13}}}\right)^4 = \left(\sqrt[2\times 2]{a^{13}}\right)^4 = \left(\sqrt[\cancel{4}]{a^{13}}\right)^{\cancel{4}} = a^{13}$$

3. Calcule utilizando as operações de potências :

3.1. $$\frac{(-5)^2 - 4^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^0}{3^{-2} + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{(-5)^2 - 4^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^0}{3^{-2} + 1} = \frac{25 - 16 + 1}{\frac{1}{3^2} + 1} = \frac{9 + 1}{\frac{1}{9} + 1} =$$

$$= \frac{10}{\frac{10}{9}} = \frac{10}{1} \times \frac{9}{10} = 9$$